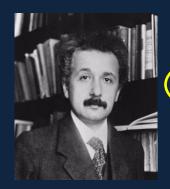


#### Allgemeine Relativitätstheorie

# ART Die Kunst, Gravitation zu erklären

- Grundlegende Ideen
- Physikalische Folgerungen
- "Beweise"

Matthias Borchardt Tannenbusch-Gymnasium Bonn



#### Spezielle Relativitätstheorie - 1905

Die beiden Postulate der Theor

- Relativitätsprinzip:

   Bezugssysteme, die sie
   konstanter Geschwindigkeit
   gegeneinander bewegen, sind
   physikalisch gleichwertig.
- 2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:
  Die Geschwindigkeit des Lichts ist
  unabhängig von dem
  Bewegungszustand des Senders
  oder des Empfängers.

#### 3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper; von A. Einstein.

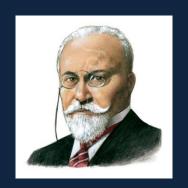
Bern, Juni 1905.

(Eingegangen 30. Juni 1905.)

Wir

wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden "Prinzip der Relativität" genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche Voraussetzung einführen, daß sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit V fortpflanze. Diese beiden Voraussetzungen genügen, um zu einer einfachen und widerspruchsfreien Elektrodynamik bewegter Körper zu gelangen ......

# Hermann Minkowski (Mathematikprofessor und früherer Universitätslehrer Einsteins ):

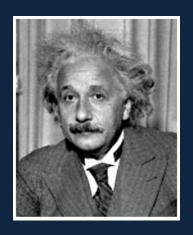


als er von der Speziellen Relativitätstheorie hörte:

"Ach der Einstein, der schwänzte immer die Vorlesungen – dem hätte ich das gar nicht zugetraut."

und später, als begeisterter Anhänger der Relativitätstheorie:

"Meine Herren! Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren."



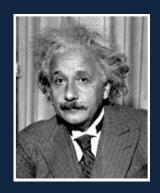
# Allgemeine Relativitätstheorie - 1915

Aus der Originalarbeit von Albert Einstein - 1916

Die Gesetze der Physik müssen so beschaffen sein, daß sie in Bezug auf beliebig bewegte Bezugssysteme gelten. Wir gelangen also auf diesem Wege zu einer Erweiterung des Relativitätspostulates.

Außer diesem schwerwiegenden erkenntnistheoretischen Argument spricht aber auch eine wohlbekannte physikalische Tatsache für eine Erweiterung der Relativitätstheorie.

Es sei K ein Galileisches Bezugssystem, d.h. ein solches, relativ zu welchem eine von anderen hinlänglich entfernte Masse sich geradlinig und gleichförmig bewegt. Es sei K' ein zweites Koordinatensystem, welches relativ zu K in gleichförmig beschleunigter Translationsbewegung sei. Relativ zu K' führte dann eine von anderen hinreichend getrennte Masse eine beschleunigte Bewegung aus, derart, daß deren Beschleunigung und Beschleunigungsrichtung von ihrer stofflichen Zusammensetzung und ihrem physikalischen Zustande unabhängig ist.



#### Allgemeine Relativitätstheorie - 1915

Auszüge aus der Originalarbeit von Albert Einstein - 1916

Aus diesen Erwägungen sieht man, daß die Durchführung der allgemeinen Relativitätstheorie zugleich zu einer Theorie der Gravitation führen muß;

denn man kann ein Gravitationsfeld durch bloße Änderung des Koordinatensystems erzeugen.

Diese Auffassung wird dadurch ermöglicht, daß uns die Erfahrung die Existenz eines Kraftfeldes (nämlich des Gravitationsfeldes) gelehrt hat, welches die merkwürdige Eigenschaft hat, allen Körpern dieselbe Beschleunigung zu erteilen. Beschleunigung erzeugt
Gravitation

### Äquivalenzprinzip

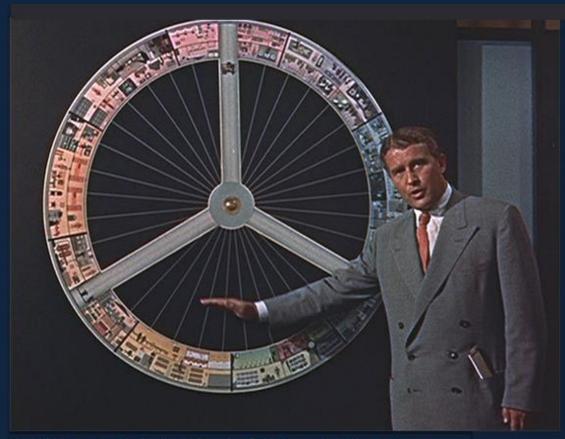
Fallbewegungen erzeugen Schwerelosigkeit

### Das Äquivalenzprinzip

#### 1. Beschleunigung "erzeugt" Gravitation



In einem mit  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$  beschleunigten Raumschiff leben die Astronauten wie auf der Erde.



Wernher von Braun discusses his idea for a spinning space station in Disney's "Man and the Moon." Photo Credit: Walt Disney Productions

2001 – Odyssee im Weltraum (Stanley Kubrick 1968)

## Das Äquivalenzprinzip

#### 1. Beschleunigung "erzeugt" Gravitation

2001 – Odyssee im Weltraum (Stanley Kubrick 1968)

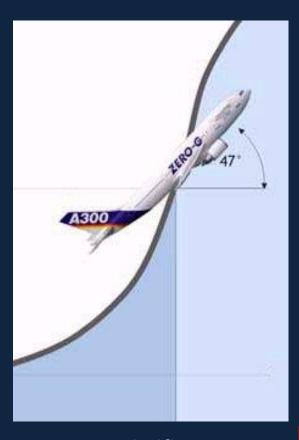


### Das Äquivalenzprinzip

2. Fall- und Wurfbewegungen "erzeugen" Schwerelosigkeit

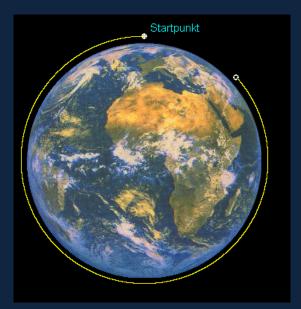


Fallturm in Bremen



Parabelflüge

Parabel Clip 1
Parabel Clip 2

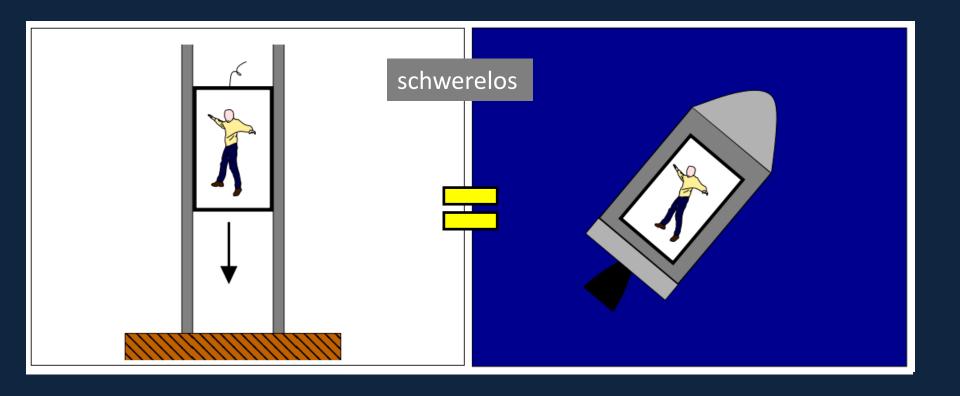


Erdumlaufbahn: unendliches Fallen um die Erde

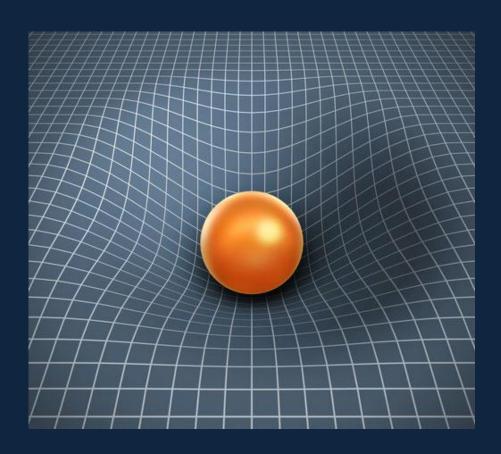
Simulation Erdumlaufbahr

http://www.mabo-physik.de/erdumlaufbahn.html

### Ausgangspunkt: Das Äquivalenzprinzip



Das Äquivalenzprinzip ist der Sockel der Allgemeinen Relativitätstheorie, aber was hat dies alles mit der Idee der Raumkrümmung zu tun?



Äquivalenzprinzip

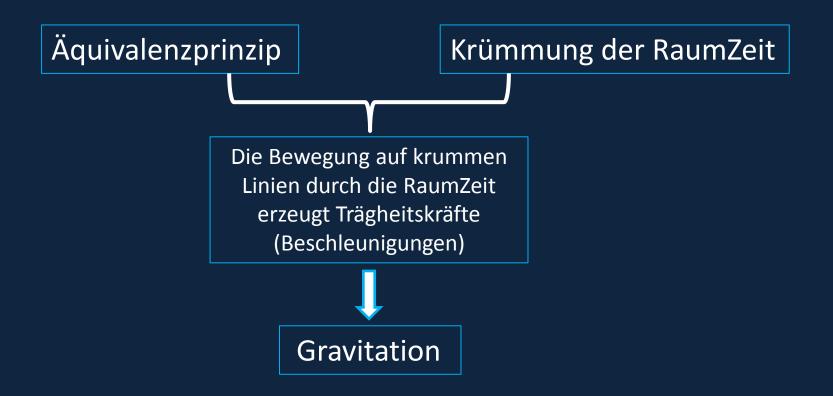


Krümmung der RaumZeit

#### **Animation:**

# Einstein versus Newton Didaktisch gute Darstellung der Raumzeit-Krümmung

https://www.youtube.com/watch?v=DdC0QN6f3G4



#### **Interpretation:**

Massen haben die Eigenschaft, die RaumZeit in ihrer Umgebung geometrisch zu verzerren. Dadurch entsteht das, was wir **Gravitation** nennen.

#### Hat das Gravitationsgesetz von Newton ausgedient oder ist es gar falsch?

#### Nein!

Die klassische Theorie von Newton erscheint als <u>Näherung</u> der Relativitätstheorie, falls die Massen nicht zu groß oder die Abstände nicht zu klein sind.

Bei der Erklärung von Schwarzen Löchern, Gravitationslinsen und Gravitationswellen reicht Newtons Theorie aber **nicht** mehr aus.

# Zur allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. Einstein.

In den letzten La.

Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen Können, der sie wirklich erfaßt hat: sie bedeutet einen wahren Trikönnen, der sie wirklich erfaßt hat: sie bedeutet einen wahren Trikönnen, der sie wirklich erfaßt hat: sie bedeutet einen wahren Trikönnen, Ricci und Levi-Civiter umph der durch Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci und Levi-Civiter umph der durch Gauss, Riemann, Differentialkalküls.

begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls.

Berade dieser Lösung in einer im vorigen Jahre in diesen Sitzungsberichten erschienenen Arbeit¹ darzutun.

#### Folgerungen und Vorhersagen: Gravitation dehnt die Zeit

Es werde ferner die auf die Zeitkoordinate untersuchte Ganggeschwindigkeit einer Einheitsuhr untersucht, welche in einem statischen Gravitationsfelde ruhend angeordnet ist. Hier gilt für eine Uhrperiode

$$ds = 1$$
;  $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$ .

Also ist

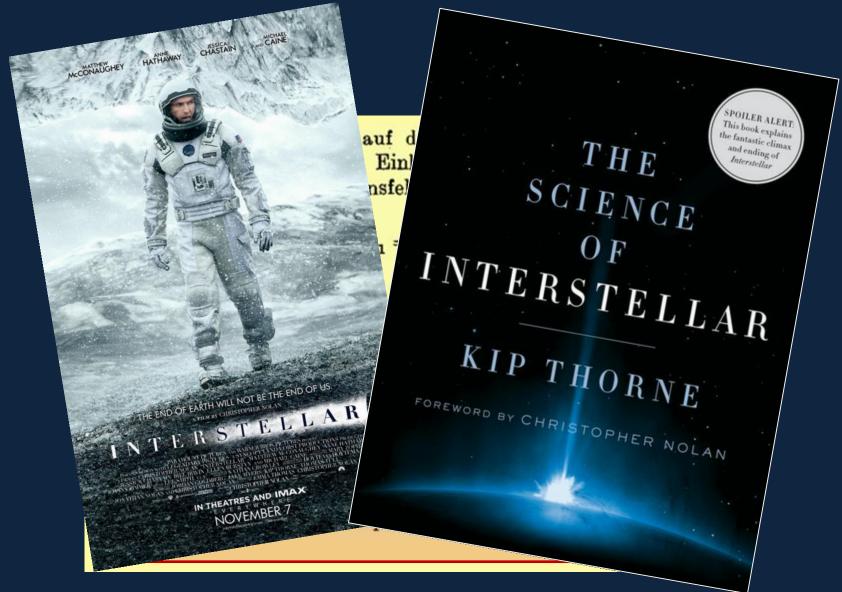
$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_{44} - 1)}} = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2}$$

oder

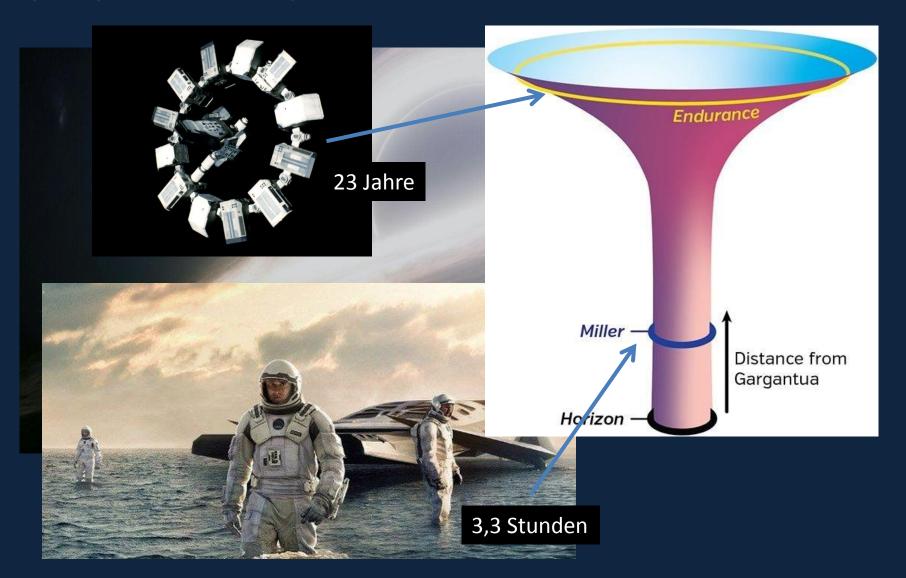
$$dx_4 = 1 + \frac{\varkappa}{8\pi} \int \frac{\varrho \, d\tau}{r}.$$

Die Uhr läuft also langsamer, wenn sie in der Nähe ponderabler Massen aufgestellt ist. Es folgt daraus, daß die Spektrallinien von der Oberfläche großer Sterne zu uns gelangenden Lichtes nach dem roten Spektralende verschoben erscheinen müssen.

#### Folgerungen und Vorhersagen: Gravitation dehnt die Zeit



#### Folgerungen und Vorhersagen: Gravitation dehnt die Zeit



#### Folgerungen und Vorhersagen: Gravitation krümmt Lichtstrahlen

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 + \frac{\alpha}{2r} \left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right)$$

Die Ausrechnung ergibt

$$(74) B = \frac{2\alpha}{A} = \frac{\times M}{4\pi A}.$$

Ein an der Sonne vorbeigehender Lichtstrahl erfährt demnach eine Biegung von 1,7", ein am Planeten Jupiter vorbeigehender eine solche von etwa 0,02".

#### Folgerungen und Vorhersagen: Periheldrehung der Merkurbahn

Berechnet man das Gravitationsfeld um eine Größenordnung genauer, und ebenso mit entsprechender Genauigkeit die Bahnbewegung eines materiellen Punktes von relativ
unendlich kleiner Masse, so erhält man gegenüber den KeplerNewtonschen Gesetzen der Planetenbewegung eine Abweichung von folgender Art. Die Bahnellipse eines Planeten erfährt in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung
vom Betrage

(75) 
$$\varepsilon = 24 \pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

pro Umlauf. In dieser Formel bedeutet a die große Halbachse, c die Lichtgeschwindigkeit in üblichem Maße, e die Exzentrizität. T die Umlaufszeit in Sekunden.<sup>1</sup>)

Die Rechnung ergibt für den Planeten Merkur eine Drehung der Bahn um 43" pro Jahrhundert, genau entsprechend der Konstatierung der Astronomen (Leverrier); diese fanden nämlich einen durch Störungen der übrigen Planeten nicht erklärbaren Rest der Perihelbewegung dieses Planeten von der angegebenen Größe.

untersuchen.

#### Folgerungen und Vorhersagen:

#### **Gravitationswellen**

# Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation.

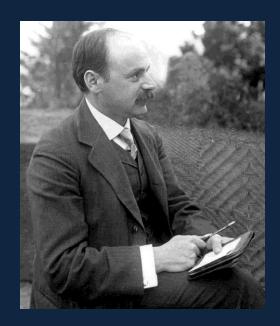
Von A. Einstein.

Bei der Behandlung der meisten speziellen (nicht prinzipiellen) Probleme auf dem Gebiete der Gravitationstheorie kann man sich damit begnügen, die  $g_{\mu\nu}$  in erster Näherung zu berechnen. Dabei bedient man sich mit Vorteil der imaginären Zeitvariable  $x_4=it$  aus denselben Gründen wie in der speziellen Relativitätstheorie. Unter "erster Näherung" ist dabei verstanden, daß die durch die Gleichung

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \tag{1}$$

definierten Größen  $\gamma_{\mu\nu}$ , welche linearen orthogonalen Transformationen gegenüber Tensorcharakter besitzen, gegen I als kleine Größen behandelt werden können, deren Quadrate und Produkte gegen die ersten Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Dabei ist  $\delta_{\mu\nu}=1$  bzw.  $\delta_{\mu\nu}=0$ , je nachdem  $\mu=\nu$  oder  $\mu\neq\nu$ .

Wir werden zeigen, daß diese γ<sub>a</sub> in analoger Weise berechnet werden können wie die retardierten Potentiale der Elektrodynamik. Daraus folgt dann zunächst, daß sich die Gravitationsfelder mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Wir werden im Anschluß an diese allgemeine Lösung die Gravitationswellen und deren Entstehungsweise



#### Karl Schwarzschild (1873 – 1916)

#### Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.

Von K. Schwarzschild.

(Vorgelegt am 13. Januar 1916 [s. oben S. 42].)

Folgerungen und Vorhersagen:

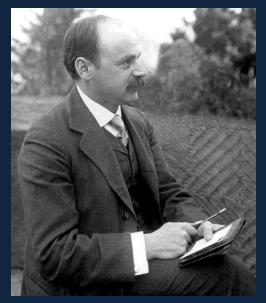
Schwarze Löcher

§ 1. Hr. Einstein hat in seiner Arbeit über die Berlinder die Berlinder

Wichtiger ist, dass die Rechnung zugen deutige Bestimmtheit der Lösung ergibt, über die Hrn. Einsteins Behandlung noch Zweifel ließ, und die nach der Art, wie sie sich unten einstellt, wohl auch nur sehwer durch ein solches Annäherungsvereinstellt, wohl auch nur sehwer durch ein solches Annäherungsvereinstellt.

Linienelements ein und kehrt zugleich zu gewöhnlichen Polarkoordinaten zurück, so ergibt sich das Linienelement, welches die strenge Lösung des Einsteinschen Problems bildet:

$$ds^{2} = (1 - \alpha/R)dt^{2} - \frac{dR^{2}}{1 - \alpha/R} - R^{2}(d\vartheta^{2} + \sin^{2}\vartheta d\phi^{2}), R = (r^{3} + \alpha^{3})^{1/3}.$$
 (14)



#### Karl Schwarzschild (1873 – 1916)

#### Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.

Von K. Schwarzschild.

(Vorgelegt am 13. Januar 1916 [s. oben S. 42].)

Folgerungen und Vorhersagen:

Schwarze Löcher

§ 1. Hr. Einstein hat in seiner Arbeit über die Bestimmt des Merkun ( State auch des Rechnung zugleich die einWichtiger ist, daß die Rechnung zugleich die eindeutige Bestimmtheit der Lösung ergibt, über die Hrn. Einsteins Bedeutige Bestimmtheit der Lösung ergibt, über Art, wie sie sich unten

Für einen außen messenden Beobachter folgt gemäß (40), daß eine Kugel von gegebener Gravitationsmasse  $\alpha$ ,  $2k^2$  keinen kleineren außen gemessenen Radius haben kann. als:

$$P_a = \alpha$$
.

Für eine Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit wird die Grenze 98α. Für die Sonne wird α gleich 3 km für eine Masse von 1 g gleich 1.5·10<sup>-28</sup> cm.)

$$ds^{2} = (1 - \alpha/R)dt^{2} - \frac{dR^{2}}{1 - \alpha/R} - R^{2}(d\vartheta^{2} + \sin^{2}\vartheta d\phi^{2}), R = (r^{3} + \alpha^{3})^{1/3}.$$
 (14)

#### Beweise für die Richtigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie

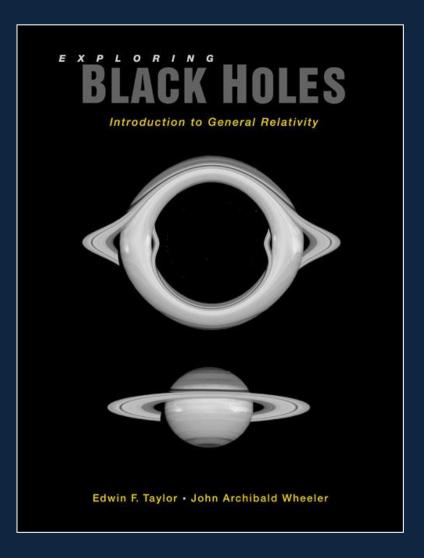
#### Historisch:

- Periheldrehung der Merkurellipse
- Lichtablenkung am Sonnenrand
- Shapiro-Experiment

#### Aktuell:

- Schwarze Löcher
- Nachweis von Gravitationswellen
- GPS

### Eine eigene Computersimulation zur ART



#### Basis:

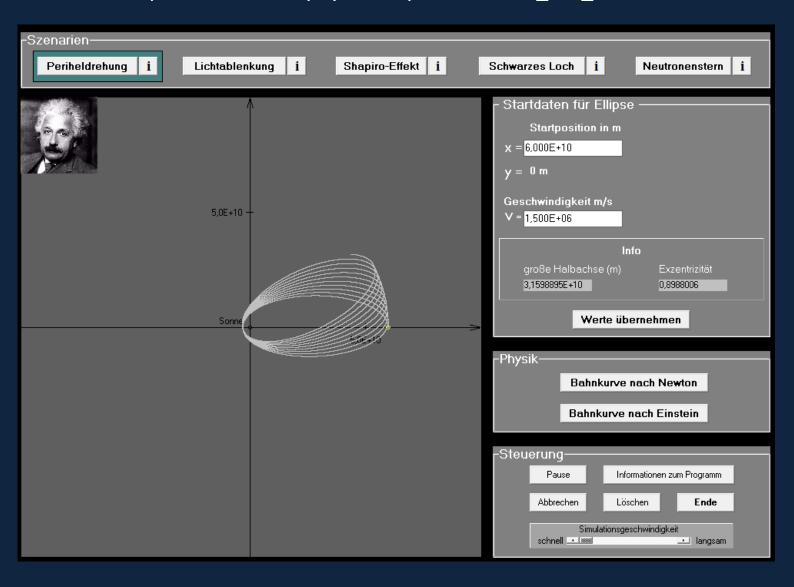
Taylor und Wheeler entwickeln ihre Einführung in die ART auf Grundlage der Schwarzschildmetrik ohne Tensoren.

Sämtliche Formeln erscheinen in differentieller Darstellung.

**ART-Simulation** 

# Computersimulation Periheldrehung Matthias Borchardt

http://www.mabo-physik.de/phaenomene\_der\_art.html



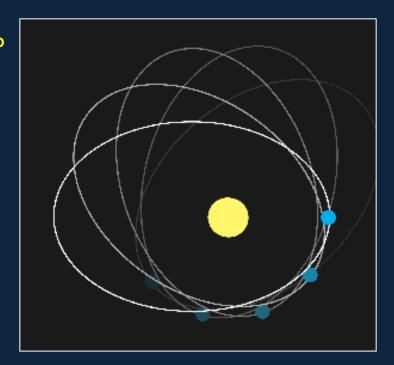
#### Periheldrehung der Merkurbahn

#### Ein astronomisches Rätsel:

Die Bahn des Merkur wird durch die übrigen Planeten so gestört, dass die Ellipse sich nach klassischer Rechnung (Newton) im Jahrhundert um 531 Bogensekunde verschieben sollte.

Gemessen werden aber 574′′ - also 43 ′′ zu viel.

Woher stammen die 43 Bogensekunden?



## ANNALEN DER PHYSIK. 1916. VIERTE FOLGE. BAND 49.

der allgemeinen Relativitätstheorie; 1. Die Grundlage

von A. Einstein. Masse, so erhält man gegenüber den Keplermateriellen Punktes von relativ chung von folgender Art. Die Bahnellipse eines Planeten erfährt in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung vom Betrage

vitationsfeld um eine Größen-

mit entsprechender Genauig-

(75) 
$$\varepsilon = 24 \pi^3 \frac{a^2}{T^2 e^2 (1 - e^2)}$$

pro Umlauf. In dieser Formel bedeutet a die große Halbachse, c die Lichtgeschwindigkeit in üblichem Maße, e die Exzentrizität, T die Umlaufszeit in Sekunden.<sup>1</sup>)

Die Rechnung ergibt für den Planeten Merkur eine Drehung der Bahn um 43" pro Jahrhundert, genau entsprechend der Konstatierung der Astronomen (Leverrier); diese fanden nämlich einen durch Störungen der übrigen Planeten nicht erklärbaren Rest der Perihelbewegung dieses Planeten von der angegebenen Größe.

#### Periheldrehung der Merkurbahn

Zu diesem Erfolg schrieb EINSTEIN am 17. Januar 1916 an seinen Freund und Kollegen PAUL EHRENFEST:

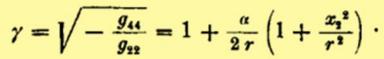
«... Denk dir meine Freude beim Resultat, dass die Gleichungen die Perihelbewegungen Merkurs richtig liefern! Ich war einige Tage fassungslos vor freudiger Erregung.»



Albert Einstein zu Besuch bei Paul Ehrenfest in Leiden im Jahr 1920. Auf Einsteins Schoß der älteste Sohn Paul Ehrenfest (Jr.).

#### Lichtablenkung am Sonnenrand

$$\Delta \phi_{\text{Newton}} = 2 \cdot \frac{G \cdot M}{b \cdot c^2} = 0,875 \text{ Bogensekunden}$$



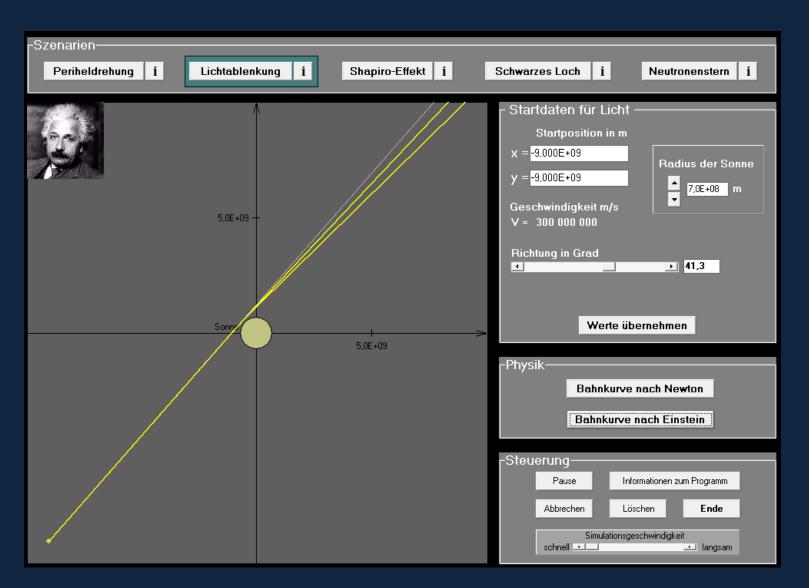
Die Ausrechnung ergibt

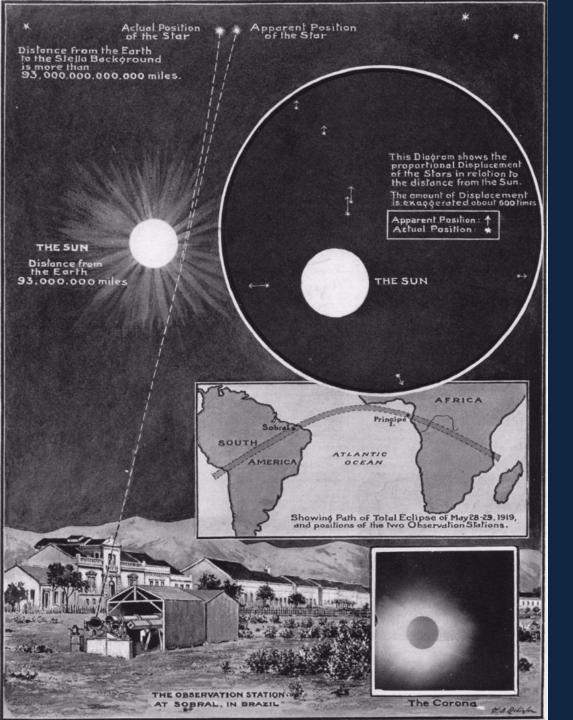
$$(74) B = \frac{2\alpha}{4} = \frac{xM}{4\pi A}.$$

Ein an der Sonne vorbeigehender Lichtstrahl erfährt demnach eine Biegung von 1,7", ein am Planeten Jupiter vorbeigehender eine solche von etwa 0,02".

# Computersimulation Lichtablenkung am Sonnenrand Matthias Borchardt

http://www.mabo-physik.de/phaenomene\_der\_art.html



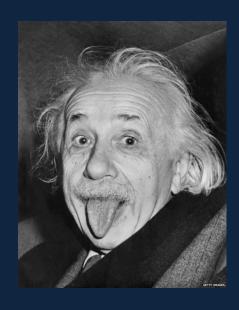


# Experimentum Crucis: 0,87" oder 1,75"

Darstellung der beiden Sonnenfinsternis-Expedition **1919** nach *Principe* vor der westafrikanischen Küste und nach *Sobral* in Nordbrasilien

aus der Zeitschrift "Illustrated London News" vom 22 November 1919

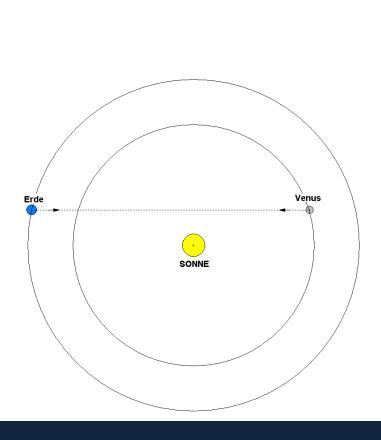
#### Einstein wird zum Medienstar



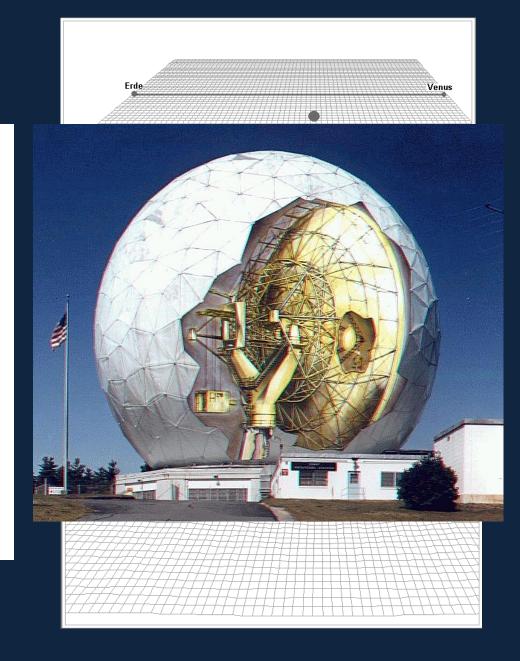
Schlagzeile New York Times vom 10. November 1919

# LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS Men of Science More or Less Agog Over Results of Eclipse Observations. **EINSTEIN THEORY TRIUMPHS** Stars Not Where They Seemed or Were Calculated to be, but Nobody Need Worry.

# Das Shapiro-Experiment von 1971

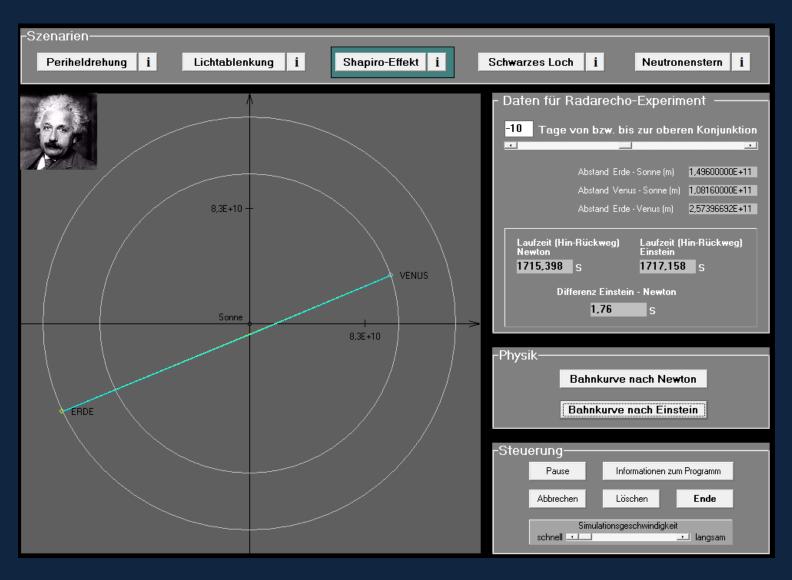


**Simulation-Shapiro** 



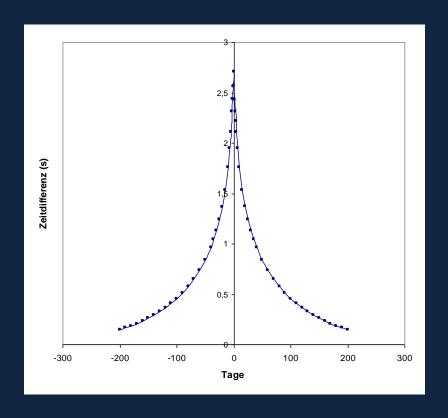
# Computersimulation: Shapiro-Verzögerung Matthias Borchardt

http://www.mabo-physik.de/phaenomene\_der\_art.html

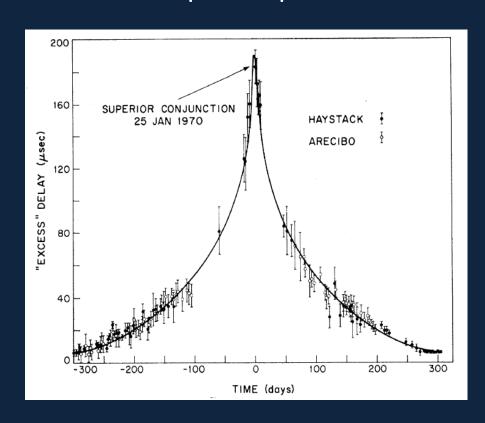


#### Graphische Darstellung der Ergebnisse

#### der Computersimulation

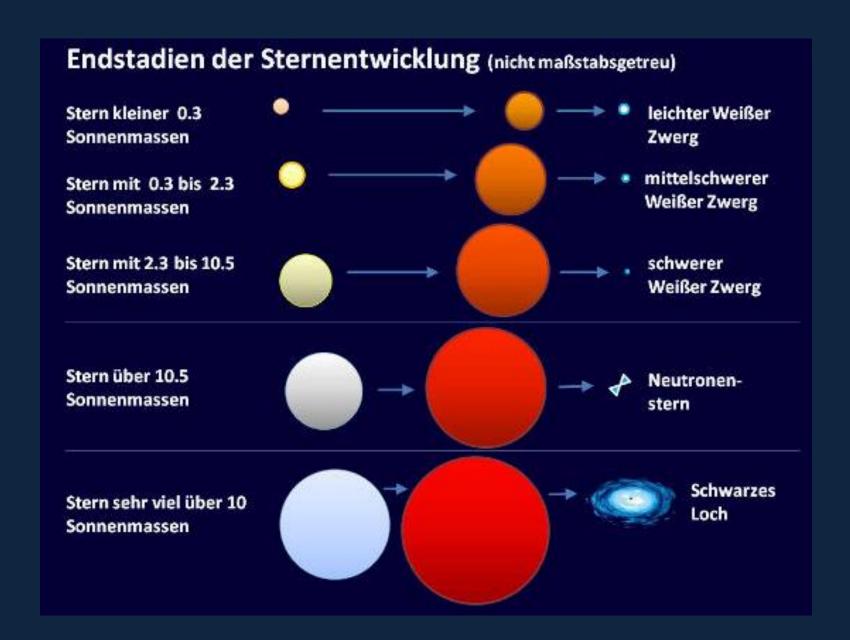


#### des Shapiro-Experiments



Fourth Test of General Relativity: New Radar Result, 1971

#### Wie entstehen schwarze Löcher?

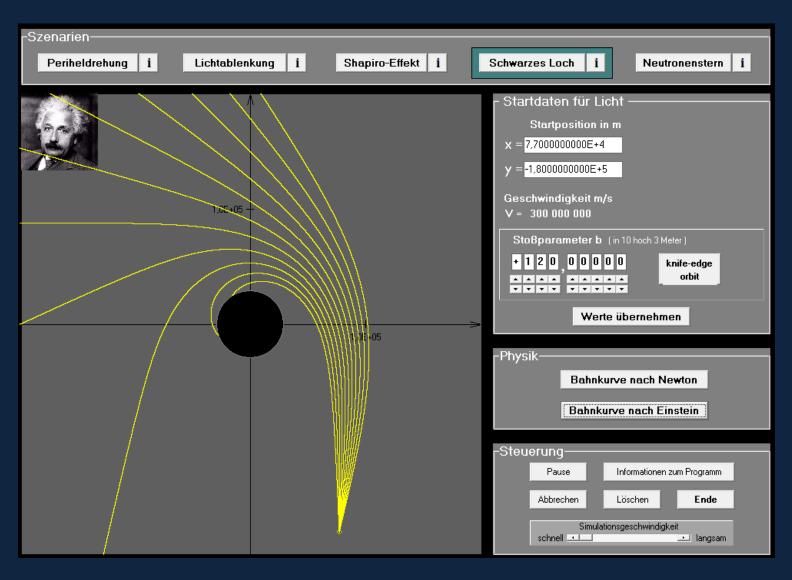


## Lichtablenkung in der Nähe eines Schwarzen Loches

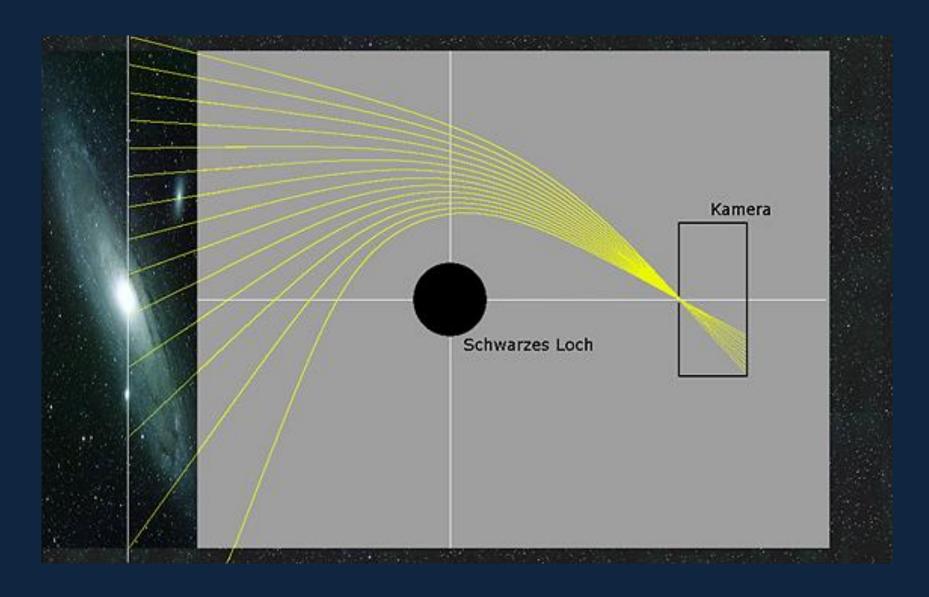
<u>Simulation – Black Hole</u>

# Computersimulation: Lichtablenkung in der Nähe eines Schwarzen Loches Matthias Borchardt

http://www.mabo-physik.de/phaenomene\_der\_art.html



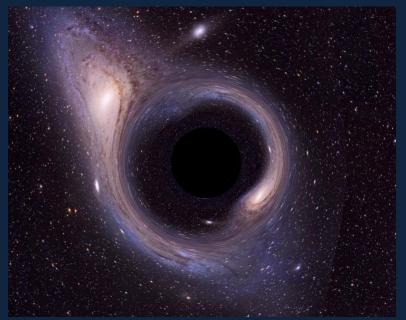
#### Bildkonstruktion mit einer virtuellen Lochkamera

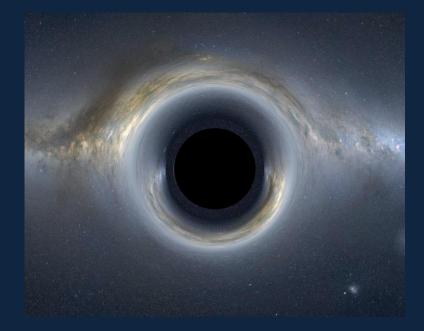






Bildanimationen von Matthias Borchardt http://www.mabo-physik.de/animationen\_zu\_schwarzen\_loechern.html





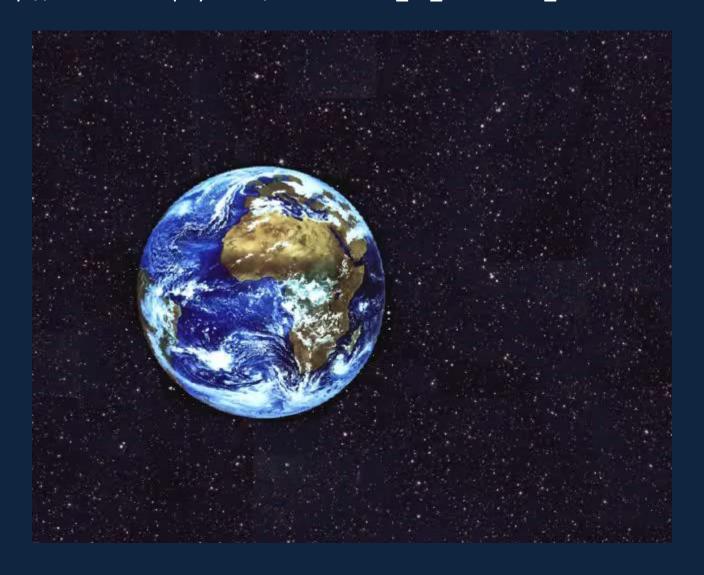


Simulation Matthias Borchardt

# Animationen von Matthias Borchardt http://www.mabo-physik.de/animationen\_zu\_schwarzen\_loechern.html



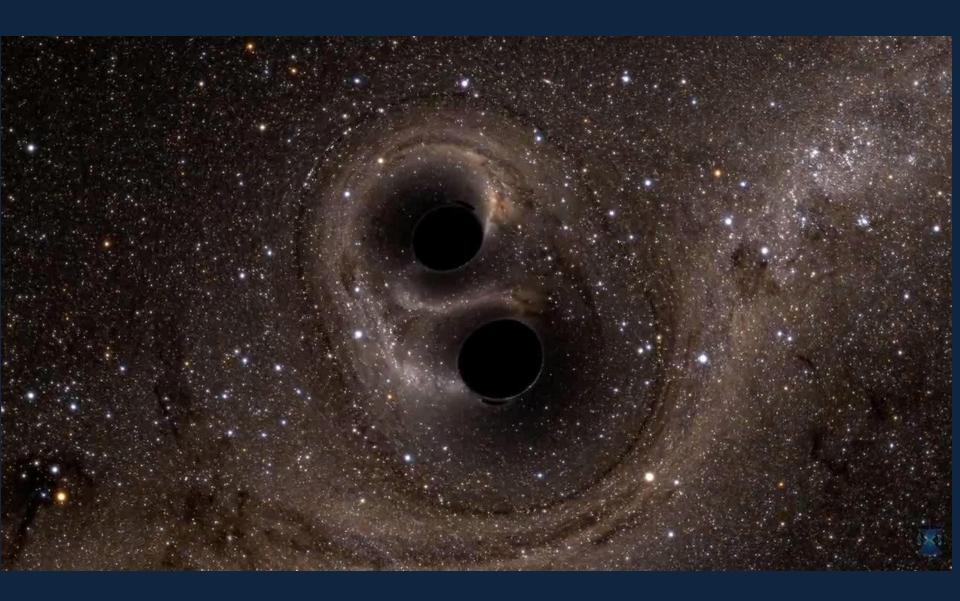
# Animationen von Matthias Borchardt http://www.mabo-physik.de/animationen\_zu\_schwarzen\_loechern.html



## 11. Februar 2016 "We did it"

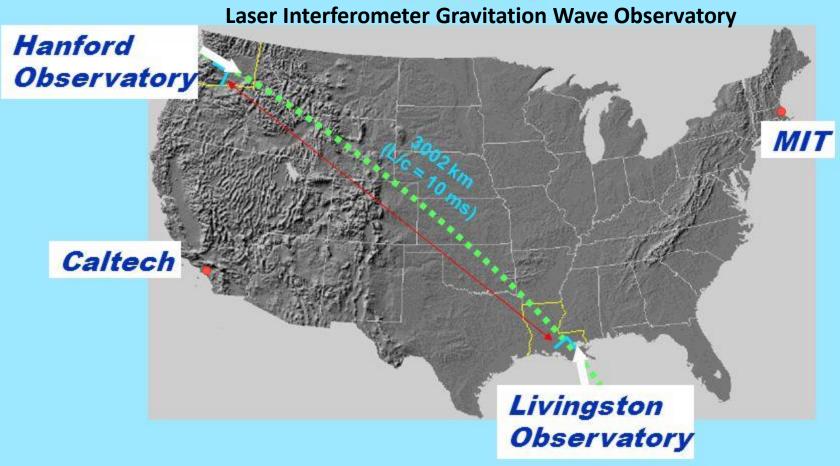


Animation: https://www.youtube.com/watch?v=I\_88S8DWbcU



# **Simultaneous Detection**

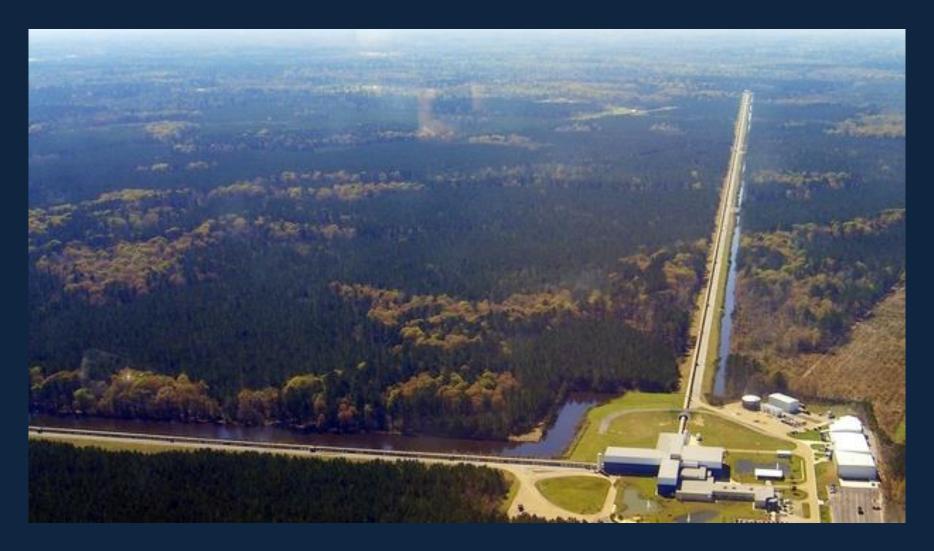




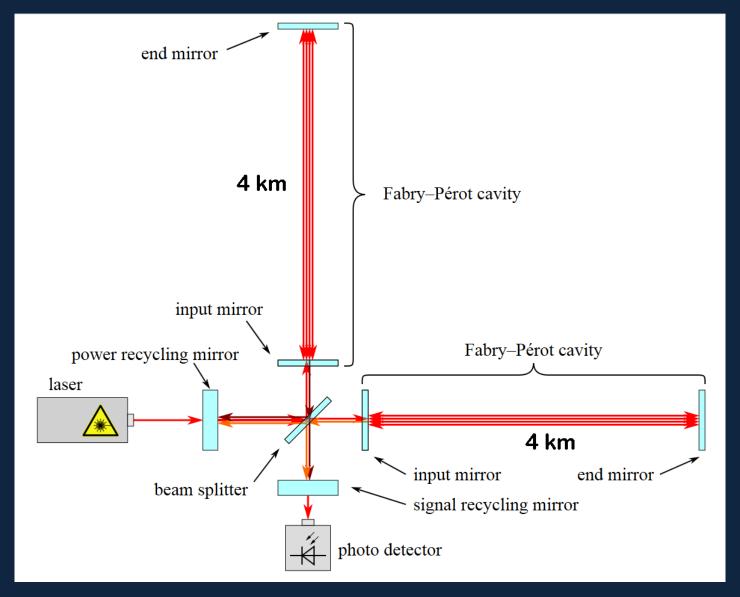
## Hanford Observatorium



## Livingston Observatorium

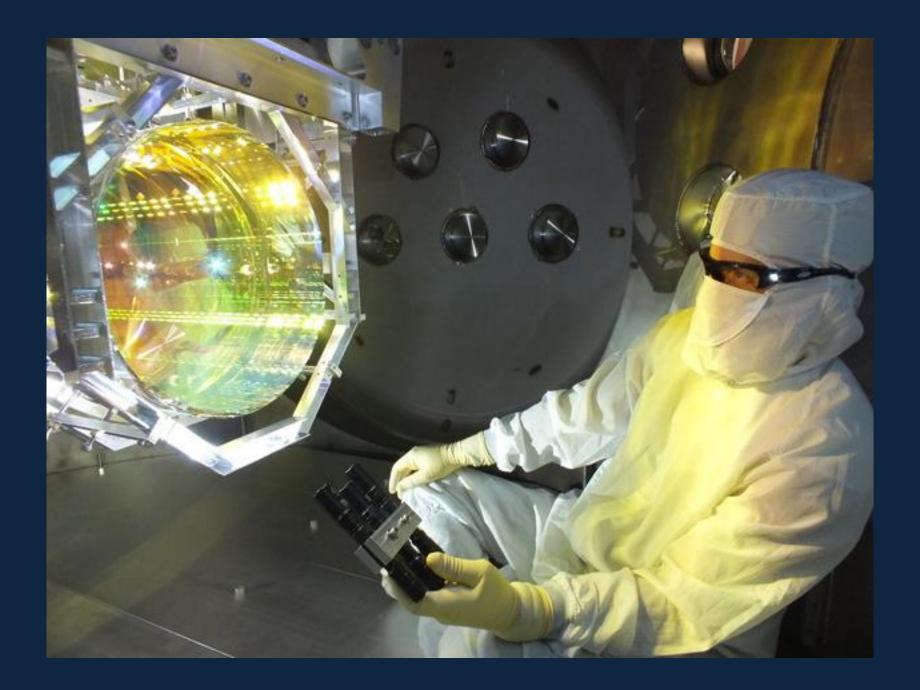


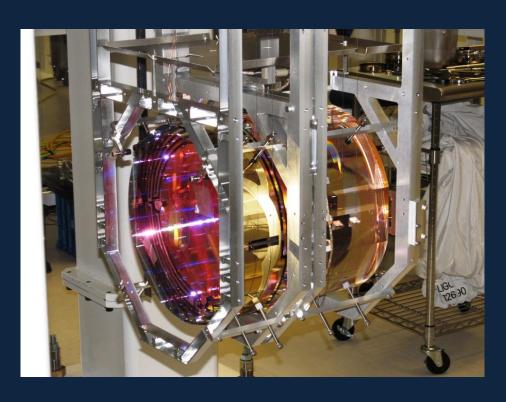
### Aufbau des Interferometers

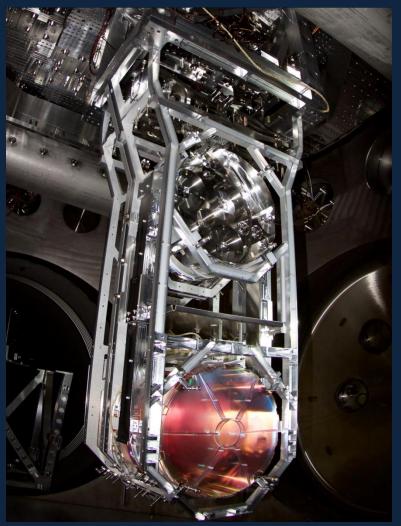


## Vakuum-System

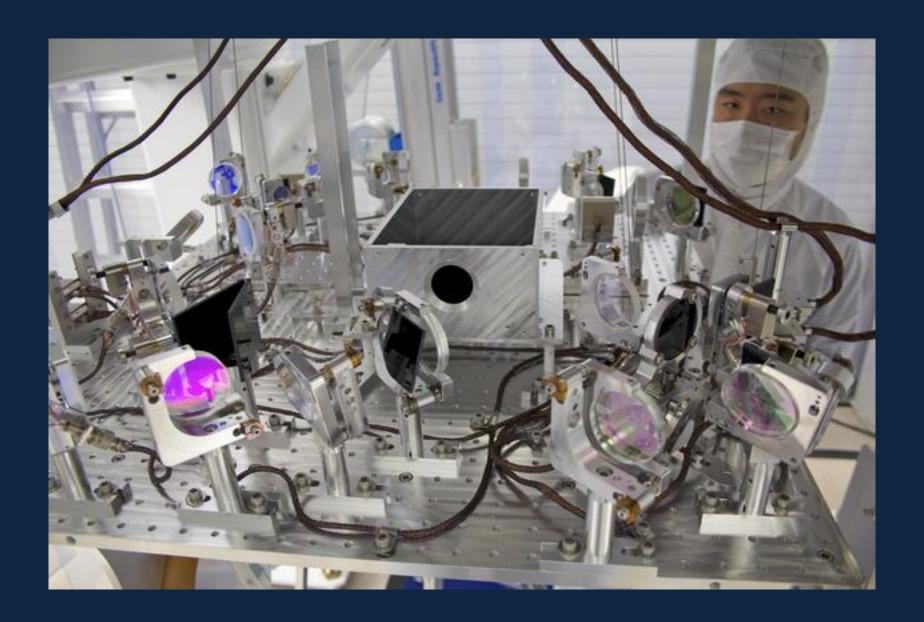




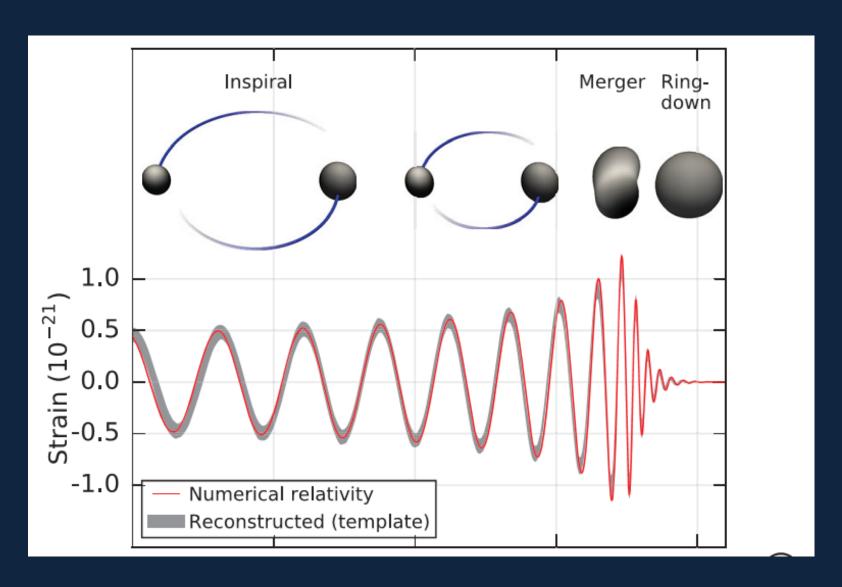




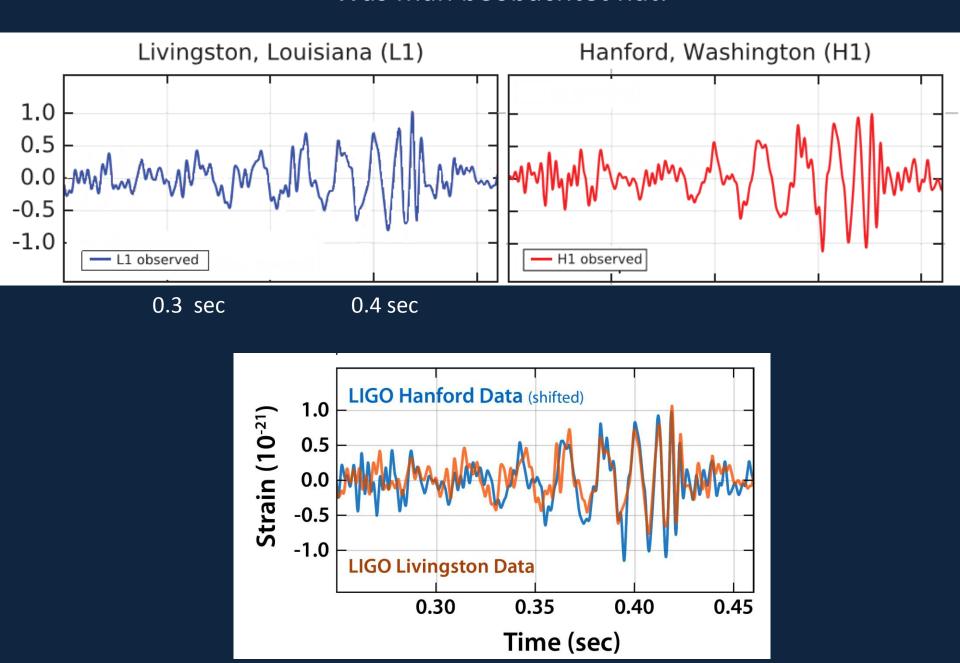




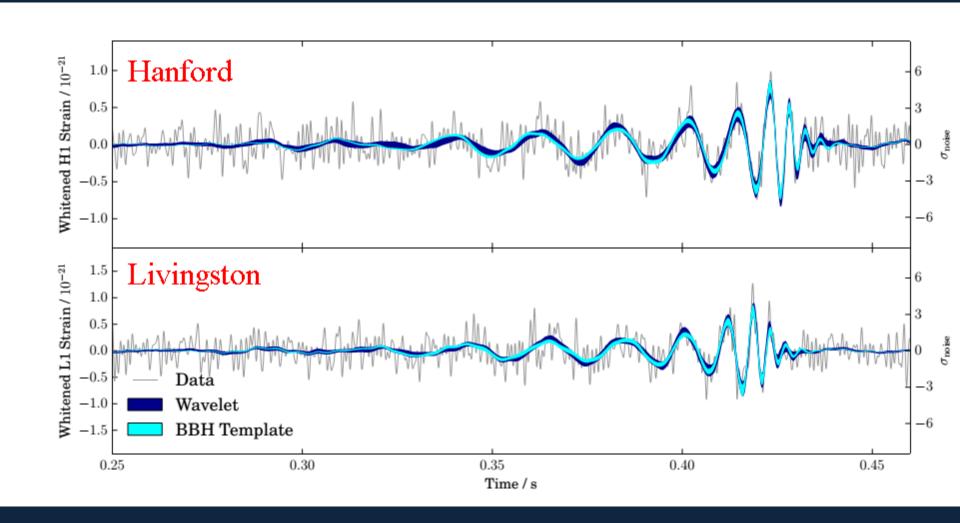
### Was man erwartet:



#### Was man beobachtet hat:



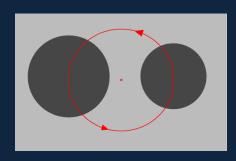
### Vergleich: Messergebnisse und Relativitätstheorie



#### **Modell-Parameter**

Entfernung von der Erde: 1,3 Milliarden Lichtjahre

Primäres Schwarzes Loch: 36 Sonnenmassen, Durchmesser 214 km



Sekundäres Schwarzes Loch: 29 Sonnenmassen, Durchmesser 172 km

Kurz vor der Verschmelzung umkreisen sich die beiden Schwarzen Löcher etwa 80 Mal pro Sekunde – mit rund 60% der Lichtgeschwindigkeit.

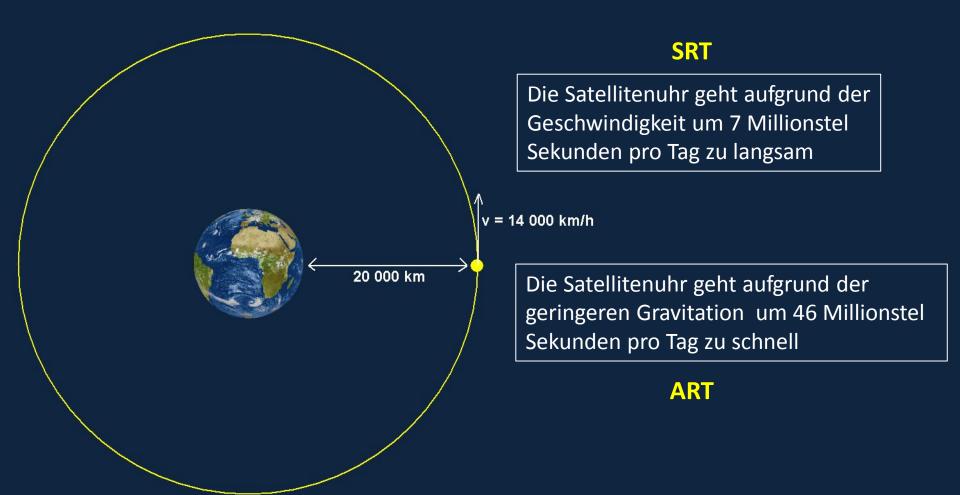
Finales Schwarzers Loch: 62 Sonnenmassen, Durchmesser 368 km



36 Sonnenmassen + 29 Sonnenmassen ergeben allerdings 65 Sonnenmassen. Es fehlen 3 Sonnenmassen!

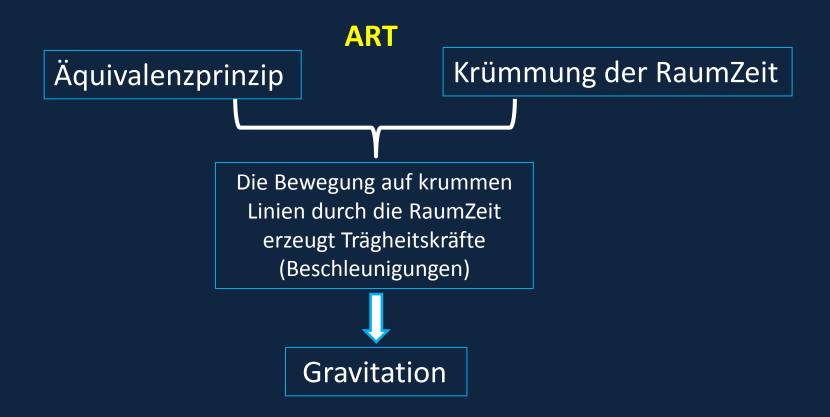
Diese wurden mit den Gravitationswellen als Energie (E = mc²) abgestrahlt - und das innerhalb von 0,2 Sekunden !!!

#### **Unzertrennlich – GPS und Relativitätstheorie**



Insgesamt geht also die Satellitenuhr gegenüber der Erduhr um 39 Millionstel Sekunden pro Tag zu schnell → Das entspricht einer Laufstrecke der Funkwellen von fast **12 km**. Die Frequenz der Uhr wird daher von 10,23 MHz auf 10,229 999 995 448 MHz verstellt. Dies gleicht die relativistischen Effekte aus.

## Zusammenfassung



#### Folgerungen:

- Gravitation lässt Uhren langsamer laufen
- Gravitation verbiegt Lichtstrahlen stärker als die klassische Physik angibt
- Planetenbahnen folgen nicht exakt der klassischen Physik
- Licht ist länger unterwegs, wenn es an großen Massen vorbei muss
- Schwarze Löcher lassen sich exakt berechnen
- Es gibt Gravitationswellen

- Die **Allgemeine Relativitätstheorie** ist die beste Theorie über Gravitation, die wir kennen.
- Die klassische Physik ist als Näherung in ihr enthalten.
- Ihre Richtigkeit wurde durch eine Vielzahl von experimentellen Ergebnissen bestätigt.
- Sie ist das "Arbeitspferd" der modernen Kosmologie

Homepage Matthias Borchardt: http://www.mabo-physik.de/

Vielen Dank für Ihr Interesse