

*Die DART-Mission
ein Kollisionstest zur Asteroidenabwehr*

1. Der Doppel-Asteroid

Daten:

Mittlerer Durchmesser des Zentralkörpers (Didymos): 780 m

Mittlerer Durchmesser des Mini-Mondes (Dimorphos): 164 m

Geschätzte Dichte der beiden Asteroiden:

$$\rho = 2170 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

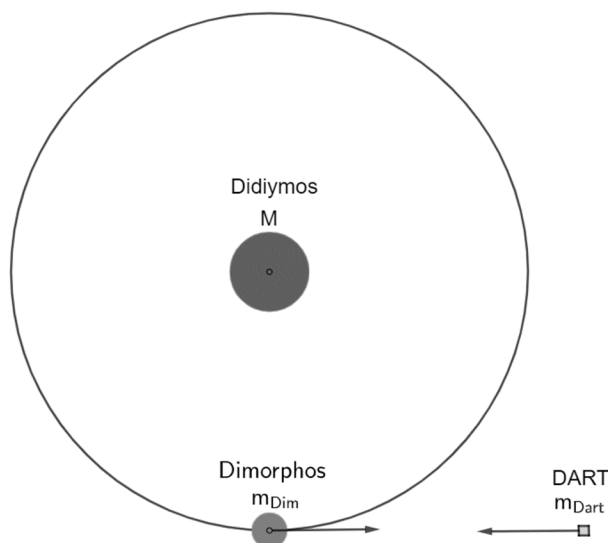
Wir nehmen an, die beiden Körper haben in etwa eine Kugelgestalt. Dann ergeben sich mit $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$, der Dichte und den Radien der Kugelkörper die Massen

$$M = 5,392 \cdot 10^{11} \text{ kg}$$

$$m_{\text{Dim}} = 5,0 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

$m_{\text{Dart}} = 570 \text{ kg}$ ist die Masse der Raumsonde beim Aufprall auf Dimorphos.

Die Umlaufzeit des Mini-Mondes wurde sehr genau gemessen und beträgt $T = 42918$ Sekunden (fast 12 Stunden).



Der Radius der Umlaufbahn:

Die Umlaufbahn wird kreisförmig angenommen. Der Radius dieses Orbits ergibt sich aus dem dritten Keplergesetz: $\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$ mit der Gravitationskonstante $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$..

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2} \Leftrightarrow r = \left(\frac{G \cdot M}{4\pi^2} \cdot T^2 \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,392^{11}}{4\pi^2} \cdot (42918)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \text{ m} = 1188,55 \text{ m. Der}$$

Radius der Umlaufbahn beträgt also etwas weniger als 1,2 km.

Die Bahngeschwindigkeit:

$$v_{\text{Dim}} = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2\pi \cdot 1188,55 \text{ m}}{42918 \text{ s}} = 0,174 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Mini-Mond Dimorphos bewegt sich also mit einer Geschwindigkeit von 17,4 cm pro Sekunde um seinen großen Bruder.


*Die DART-Mission
ein Kollisionstest zur Asteroidenabwehr*

2. Die Kollision

Die neue Bahngeschwindigkeit:

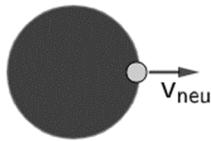
Wir nehmen vereinfachend an, dass der Zusammenstoß der Raumsonde mit dem Mini-Mond Dimorphos ein **inelastischer Stoßprozess** ist. Das bedeutet, dass nach der Kollision beide Körper aneinanderhaften, sich die Geschwindigkeit des Mondes aber verringert hat. Diese neue Geschwindigkeit lässt sich mithilfe des Impulserhaltungssatzes berechnen:

Vor dem Zusammenstoß:



Impulse: $p_1 = m_{\text{Dim}} \cdot v_{\text{Dim}}$ $p_2 = -m_{\text{Dart}} \cdot v_{\text{Dart}}$

Nach dem Zusammenstoß:



resultierender Impuls: $p_{\text{res}} = (m_{\text{Dim}} + m_{\text{Dart}}) \cdot v_{\text{neu}}$

Impulserhaltung: $p_{\text{res}} = p_1 + p_2$

$$(m_{\text{Dim}} + m_{\text{Dart}}) \cdot v_{\text{neu}} = m_{\text{Dim}} \cdot v_{\text{Dim}} - m_{\text{Dart}} \cdot v_{\text{Dart}}$$

$$\Leftrightarrow v_{\text{neu}} = \frac{m_{\text{Dim}} \cdot v_{\text{Dim}} - m_{\text{Dart}} \cdot v_{\text{Dart}}}{m_{\text{Dim}} + m_{\text{Dart}}}$$

Die Aufprallgeschwindigkeit der Raumsonde Dart wird mit 6100 m/s (fast 21960 km/h) angegeben. Damit ergibt sich aus der oberen Formel eine **neue Umlaufgeschwindigkeit** des Mondes von $v_{\text{neu}} = 0,1733 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die Geschwindigkeitsänderung aufgrund des zentralen, inelastischen Stoßes beträgt dann

$\Delta v = 0,174 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,1733 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,0007 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Das bedeutet: Aufgrund der Kollision verringert sich die Bahngeschwindigkeit im betrachteten Punkt um 0,7 mm pro Sekunde.

Die DART-Mission
ein Kollisionstest zur Asteroidenabwehr

Die Verkleinerung der Umlaufbahn

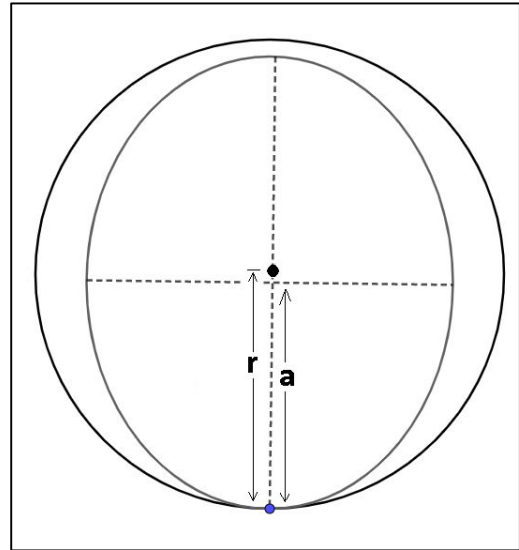
Aufgrund der Verringerung der Geschwindigkeit ist die Kreisbahn nun zu einer Ellipsenbahn geworden. In der Abbildung ist die Ellipsenbahn übertrieben dargestellt – in Wirklichkeit ist die Exzentrizität extrem klein ($e \approx 0,008$).

Um den neuen Radius der Bahn, bzw. die große Halbachse a der Ellipse zu berechnen, bedienen wir uns einer Energiebetrachtung:

Die kinetische Energie des Mondes nach der Kollision beträgt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{Dim}} \cdot v_{\text{neu}}^2 . \text{ Seine potentielle}$$

$$\text{Energie ist } E_{\text{pot}} = -\frac{G \cdot m_{\text{Dim}} \cdot M}{r} .$$



Die Gesamtenergie einer Masse auf einer Umlaufbahn um einen Zentralkörper berechnet

$$\text{sich aus } E_{\text{ges}} = -\frac{G \cdot m_{\text{Dim}} \cdot M}{2 \cdot a} .$$

Damit ergibt sich der Ansatz:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{ges}}$$

$$\frac{1}{2} m_{\text{Dim}} \cdot v_{\text{neu}}^2 - \frac{G \cdot m_{\text{Dim}} \cdot M}{r} = -\frac{G \cdot m_{\text{Dim}} \cdot M}{2 \cdot a}$$

Umgestellt nach a ergibt das die Formel:

$$a = \frac{G \cdot M}{\frac{2G \cdot M}{r} - v_{\text{neu}}^2} = \frac{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,392 \cdot 10^{11}}{\frac{26,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,392 \cdot 10^{11}}{1188,55} - (0,1733)^2} \text{ m} = 1179,12 \text{ m}$$

Die Halbachse der Umlaufbahn hat sich aufgrund der Kollision also um $\Delta r = 1188,55 \text{ m} - 1179,12 \text{ m} = 9,43 \text{ m}$ verkleinert.

Die neue Umlaufzeit:

Aus dem dritten Keplergesetz ergibt sich:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2} \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G \cdot M} \cdot a^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,392 \cdot 10^{11}} \cdot (1179,12)^3} \text{ s} \approx 42408 \text{ s}$$

Die Verringerung der Umlaufdauer ist dann: $\Delta T = 42918 \text{ s} - 42408 \text{ s} = 510 \text{ s}$. Das sind 8 Minuten und 30 Sekunden.

*Die DART-Mission
ein Kollisionstest zur Asteroidenabwehr*

3. Zusammenfassung:

Unter der Voraussetzung, dass die Kollision wie bei einem zentralen inelastischen Stoß abläuft, ändern sich die Parameter des Doppelasteroiden wie folgt:

- Verringerung der **Umlaufzeit** um 510 Sekunden
- Verringerung der **Umlaufgeschwindigkeit** im Kollisionspunkt um 0,7 mm pro Sekunde
- Verringerung der **großen Halbachse** der Bahnkurve um 9,43 m.

Es wird allerdings angenommen, dass bei der Kollision aufgrund der Kraterbildung Material des Mondes herausgeschleudert wird. Dadurch entsteht ein zusätzlicher bremsender Impuls, sodass die Änderung der Bahnparameter vermutlich größer -als oben berechnet- ausfallen dürfte.

*Matthias Borchardt
Tannenbusch-Gymnasium Bonn*

Die Daten wurden entnommen aus:

Andrew S. Rivkin et al. „*The Double Asteroid Redirection Test (DART): Planetary Defense Investigations and Requirements*“, The Planetary Science Journal, 2021 October

<https://iopscience.iop.org/article/10.3847/PSJ/ac063e>

*Die DART-Mission
ein Kollisionstest zur Asteroidenabwehr*

Aus der Veröffentlichung von Rivkin et al.: eine Tabelle und eine Abbildung:

Table A5 Physical Properties of System and Components	
Parameter	Value
Diameter of primary D_P^a	780 m \pm 30 m
Diameter of secondary D_S^1	164 m \pm 18 m
Bulk density of the primary ρ_P	2170 kg m ⁻³ \pm 350 kg m ⁻³
Bulk density of the secondary ρ_S^b	2170 kg m ⁻³ \pm 350 kg m ⁻³
Secondary elongation a_S/b_S and b_S/c_S^c	1.3 \pm 0.2, 1.2
Distance between the center of primary and secondary a_{orb}	1.20 km \pm 0.03 km
Total mass of system M	5.55×10^{11} kg \pm 0.42×10^{11} kg.
Didymos extents along principal axes x; y; z	832 \pm 25 m; 837 \pm 25 m; 786 \pm 25 m;

